

همنهشتی مثلثها

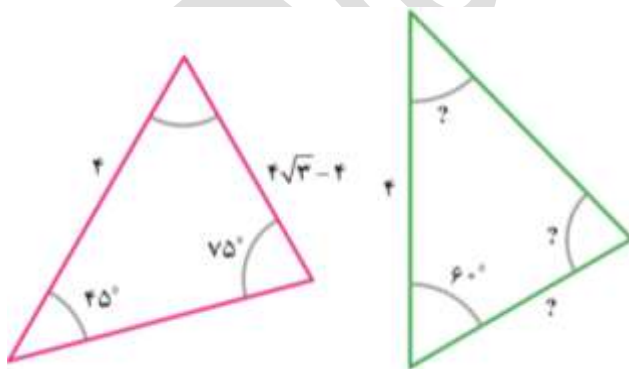
به نام خدا

در جلسه قبل حالت‌های مختلف همنهشتی مثلث‌ها رو با هم دیدیم. حالا می‌فوییم از مطالبی که یاد گرفتیم استفاده کنیم.

وقتی دو مثلث با هم همنهشت باشن، ما می‌تونیم اونا رو کاملاً بر هم منطبق کنیم. پس اگه اطلاعاتی از یکی از مثلث‌ها داشته باشیم، می‌تونیم مطمئن باشیم که مثلث دوم هم اون اطلاعات رو داره.

مثلاً اگه یه مثلث زاویه 40° داشته، متماون یکی هم یه زاویه 40° درجه داره. حالا با این مقدمه ای که گفتیم بریم چند تا سوال حل کنیم:

۱- در شکل‌های زیر، دو مثلث داخل هر کادر با یکدیگر همنهشت‌اند. اندازه پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را روی شکل مشخص کنید:



اینجا توی مثلث سبز، یه زاویه 60° داریم ولی دو تا زاویه ای که توی مثلث قرمز

مشخص شده هیچکدومش 60° درجه نیست، پس اون زاویه ای که مجهوله اندازه‌ش 60° درجه‌س.

الان سه تا زاویه مثلث قرمز مشخص شد. زاویه های مجهول مثلث سبز چند درجه هستند؟

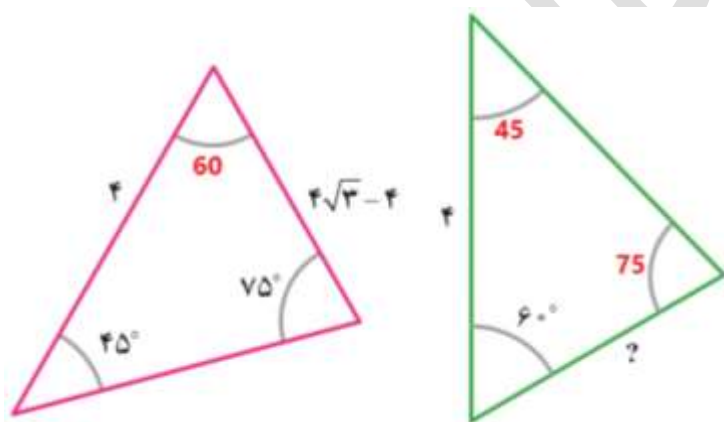
به مثلث قرمز نگاه می‌کنیم، یه زاویه ۶۰ درجه داره، یه زاویه ۴۵ درجه و یه زاویه ۷۵ درجه.

پس مثلث سبز هم باید این زاویه ها رو داشته باشه. پس اون دو تا زاویه ای که توی مثلث سبز مجهول هستن یکیشون ۴۵ درجه‌س، یکیشون ۷۵ درجه.

حالا باید تعیین کنیم کدوم ۴۵ درجه‌س و کدوم ۷۵ درجه.

به مثلث قرمز نگاه می‌کنیم، ضلع روبروی زاویه ۷۵ درجه، اندازه ش ۴ هست.

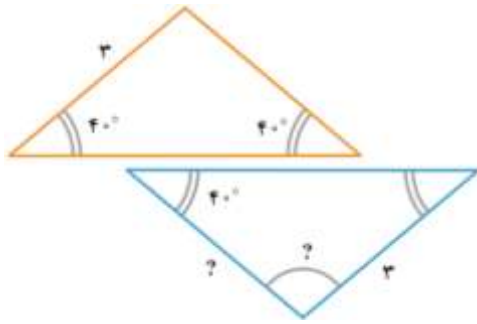
پس توی مثلث سبز هم باید ضلع ۴ و زاویه ۷۵ روبروی هم باشن. تا اینجا مشخص شد که زاویه ۷۵ درجه کدومه. پس اون یکی زاویه هم میشه ۴۵ درجه. تا اینجا داریم:



مجهول بعدی ما چیه؟ ضلع بین زاویه ۶۰ درجه و ۷۵ درجه توی مثلث سبز. از کجا باید بفهمیم چنده؟

باید ضلع بین زاویه ۶۰ درجه و ۷۵ درجه رو توی مثلث قرمز نگاه کنیم. چنده؟ $4\sqrt{3} - 4$

پس ضلع مجهول هم $4\sqrt{3} - 4$ هست.

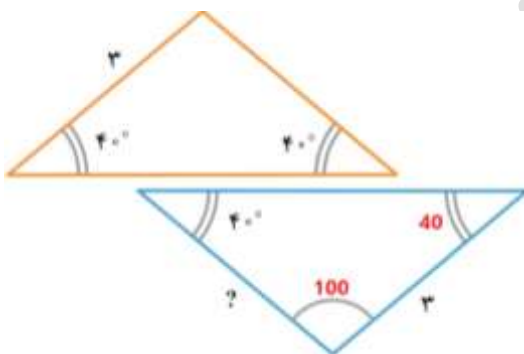


در مثلث نارنجی دو تا زاویه 40° درجه داریم. پس توی مثلث آبی هم باید دو تا زاویه 40° درجه داشته باشیم.

از طرفی می‌دونیم که مجموع زاویه های داخلی یک مثلث 180° درجه است. پس اندازه زاویه مجهول در مثلث آبی برابر است با:

$$\text{اندازه زاویه مجهول} = 180 - (40 + 40) = 180 - 80 = 100$$

پس تا اینجا داریم:



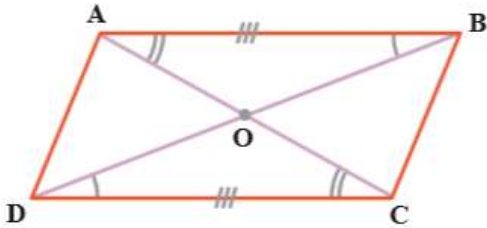
الان فقط اندازه یکی از ضلع ها مجهوله. آگه دقت کنید می‌بینید که مثلث ما یک مثلث متساوی الساقینه. چرا؟

چون آگه دو تا زاویه در یک مثلث با هم برابر باشن، ضلعهای روبرو به اون دو زاویه هم با هم برابرن و بنابراین مثلث متساوی الساقین میشه.

در اینجا هم دو تا زاویه برابر داریم پس مثلث متساوی الساقین هست و بنابراین اندازه ضلع مجهول هم برابر 3 میشه.

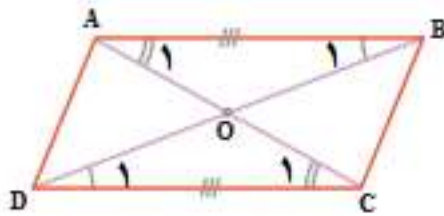
حل تمرین صفحه ۴۸

همنهشتی مثلث‌ها



۱- ثابت کنید قطرهای هر متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند. یعنی در شکل مقابل نشان دهید: $OA = OC$ و $OB = OD$.

ما آگه بتونیم ثابت کنیم که دو مثلث OAB و OCD با هم همنهشت هستند، اونوقت می‌تونیم تساویهایی که سوال ازمون خواسته رو نشون بدهیم.



با توجه به شکل تساوی‌های زیر رو داریم:

$$A1 = C1$$

$$B1 = D1$$

$$AB = DC$$

پس دو مثلث بنا به حالت دو ضلع و زاویه بین با هم برابرند. یعنی دو مثلث با هم همنهشتن ... پس می‌تونیم اونا رو بر هم منطبق کنیم.

زاویه D1 با زاویه B1 برابره، پس ضلعهای روبروی این دو زاویه هم با هم برابرند
بنابراین:

$$OA = OC$$

از طرفی زاویه A1 با زاویه C1 برابره پس ضلعهای روبرو به این دو زاویه هم با هم
برابرند. یعنی:

$$OD = OB$$

و ما توانستیم تساویهای فواسته شده رو نشون بدیم.

توجه توجه توجه:

ما قبل از اینکه ثابت کنیم دو تا مثلث همنهستن، اجازه نداشتیم بگیم که:

چون زاویه D1 با زاویه B1 برابره، پس ضلعهای روبروی این دو زاویه هم با هم
برابرند.

و اینکه اجازه نداشتیم بگیم:

چون زاویه A1 با زاویه C1 برابره پس ضلعهای روبرو به این دو زاویه هم با هم
برابرند

زمانی می‌تونیم از این روابط استفاده کنیم که قبلش ثابت کرده باشیم دو تا مثلث
همنهست هستن.

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ازمین کانال مراجعه کنید.

حل مساله در هندسه

برای اینکه بتوانیم مسائل هندسی رو حل کنیم یه روش ثابت وجود نداره، ولی استفاده از گامهای زیر میتونه بهمون کمک کنه.

۱. صورت مساله رو با دقت بفونید.

۲. آگه مساله شکل نداره، سعی کنید برای اون یه شکل مناسب بکشید. استفاده از شکل در مسائل هندسی خیلی بهمون کمک میکنه.

۳. فرض و حکم مساله رو مشخص کنید. جلسه قبل درباره تعیین فرض و حکم مساله با هم صحبت کردیم.

۴. با یه استدلال درست و منطقی و با استفاده از فرضهای مساله، حکم رو ثابت کنید.

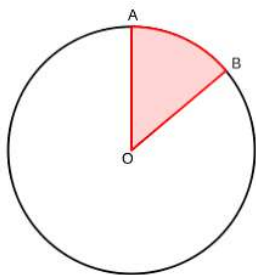
یه نکته رو فراموش نکنید، برای مهارت پیدا کردن در مسائل هندسه، باید تا میتونید مساله حل کنید تا با حالتهای مختلف سوال آشنا بشید.

مثلا ما با حل مساله های مختلف، فهمیدیم که آگه دو تا مثلث به هم چسبیده بودن، هتما اون ضلع مشترکشون به دردمون میفوره واسه اثبات کردن 😊

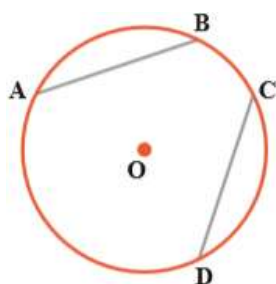
قبل از اینکه بفوایم مساله حل کنیم یه مطلب کوچیک از سال قبل رو براتون میگم، زاویه مرکزی یادتونه؟

زاویه ای بود که راسش روی مرکز دایره قرار داشت.

شکل زیر به زاویه مرکزی رو نشون میده:

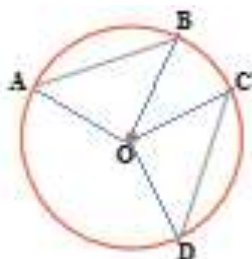


یه نکته خیلی مهم که این زاویه ها داشتن این بود که: اندازه کمان AB، با اندازه زاویه مرکزی روبروی اون یعنی زاویه O برابره. با توجه به مطالبی که گفتیم بریم به سوال حل کنیم:



۱- در شکل مقابل وترهای AB و CD با هم مساوی اند. نشان دهید کمان های \widehat{AB} و \widehat{CD} مساوی اند.

یکی دیگه از اون نکته هایی که گفتیم توی حل مسائل هندسی به دردمون میفوره اینه که: هر وقت توی سوال **دایره** داشتیم، به احتمال خیلی خیلی زیاد میتونیم از این مساله استفاده کنیم که "شعاع های یک دایره با هم مساوین". پس با در نظر گرفتن این نکته میایم ۴ تا از شعاع های دایره رو می کشیم تا دو تا مثلث ایجاد کنیم:



حالا اگر بتونیم ثابت کنیم دو مثلث OAB و OCD هم‌نوشتن، در واقع مساله رو حل کردیم. پس بریم که اثبات کنیم:

گفتیم اول از همه صورت مساله رو جمله به جمله می‌فونیم ببینیم چی بومون گفته:

گفته AB و CD با هم مساوین. پس:

$$AB = CD$$

خب دیگه صورت سوال چیزی بومون نداده، بریم ببینیم از شکل چه فرض‌هایی می‌تونیم در بیاریم.

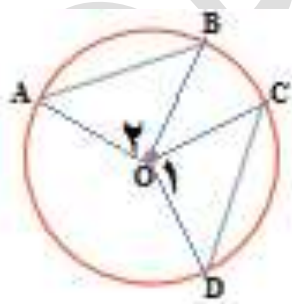
گفتیم هر وقت دایره داشتیم چی به دردمون می‌فوره؟ شعاع دایره! چون شعاع‌های دایره با هم برابرین، پس:

$$OA = OD$$

$$OB = OC$$

بنابراین دو مثلث بنا به حالت سه ضلع با هم برابرین.

یه بار دیگه شکل رو ببینید:



ثابت کردیم دو مثلث هم‌نوشتن، پس:

زاویه های $O1$ و $O2$ با هم برابرین.

از طرفی

زاویه های $O1$ و $O2$ مرکزی هستند و گفتیم کمان روبروی یک زاویه مرکزی با اون زاویه مرکزی برابر، یعنی :

$$O1 = \widehat{CD}$$

$$O2 = \widehat{AB}$$

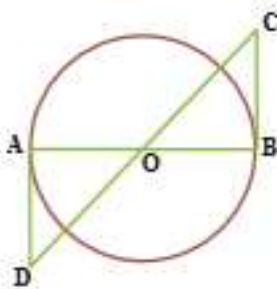
پس نتیجه می گیریم:

کمانهای AB و CD با هم برابرند.

برعکس این مطلب رو هم می تونیم ثابت کنیم، یعنی می تونیم نشون بدیم آگه در یک دایره دو کمان مساوی داشته باشیم، وترهای مقابل اون کمانها هم با هم برابرند. پس نتیجه زیر رو داریم:

در یک دایره اگر دو کمان برابر باشند، وترهای نظیر آنها با هم برابرند و اگر دو وتر برابر باشند، کمانهای نظیر آنها نیز با هم برابرند.

یه مثال دیگه:



۲- در شکل مقابل O مرکز دایره است و BC و AD بر دایره مماس اند، نشان دهید که BC و AD برابرند.

می دونیم که: مماس بر دایره در نقطه تماس، بر شعاع دایره عمود است.

یعنی CB بر OB عموده و DA بر OA . بنابراین زاویه های A و B قائمه هستند:

$$A = B$$

OA و OB هم که شعاع دایره هستند، پس:

$$OA = OB$$

از طرفی زوایای $O1$ و $O2$ متقابل به راستند، پس:

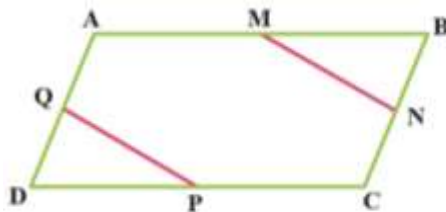
$$O1 = O2$$

پس دو مثلث بنا به حالت دو زاویه و ضلع بین با هم هم‌نهشتند، بنابراین:

$$AD = BC$$

حل تمرین صفحه ۵۱

حل مساله در هندسه



۱- در شکل مقابل متوازی‌الاضلاع ABCD متوازی‌الاضلاع است و M و N و P و Q وسط‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع اند، ثابت کنید: $MN=PQ$

اطلاعاتی که مساله به‌همون داده رو می‌نویسیم:

ABCD متوازی‌الاضلاع، پس زاویه‌های روبرو با هم برابرند. یعنی:

$$D = B$$

از طرفی باز هم با توجه به متوازی الاضلاع ABCD، داریم:

$$AB = CD$$

$$AD = BC$$

صورت سوال گفته M و P وسط اضلاع. پس:

$$MB = DP$$

$$NB = DQ$$

پس دو مثلث بنا به حالت دو ضلع و زاویه بین با هم هم‌نهشتن، پس:

$$MN = PQ$$

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

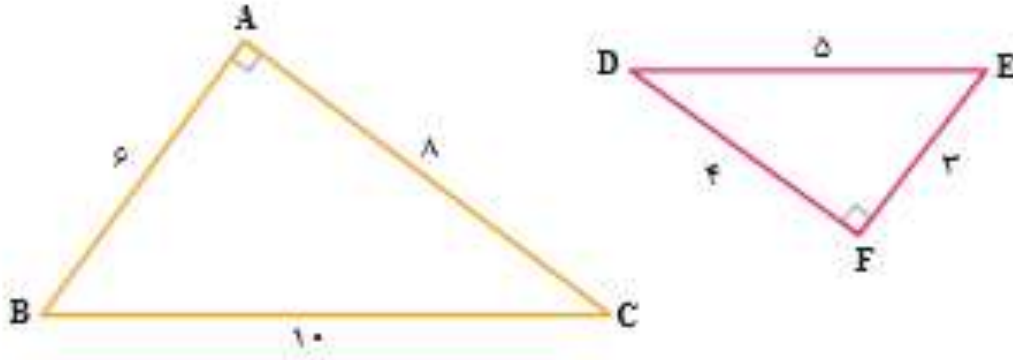
در صورت تمایل به عضویت، به ازمین کانال مراجعه کنید.

شکل‌های متشابه

متشابه به معنی شبیه هم بودن، دو تا شکل رو زمانی می‌گیم متشابه، که دقیقاً شبیه هم باشن فقط اندازه هاشون با هم متفاوت باشه.

با یه مثال "نسبت تشابه" رو توضیح میدیم:

دو تا شکل زیر با هم متشابه هستند، اول ضلع های متناظر اونها رو مشخص کنید و بعد نسبت ضلعهای متناظر رو به صورت کسر بنویسید:



نسبت اضلاع متناظر به صورت زیر همیشه:

$$\frac{10}{5} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3}$$

اگه این کسرها رو ساده کنیم برابر $\frac{1}{2}$ هستند. به این نسبت، نسبت تشابه گفته میشه. پس تعریف نسبت تشابه به این صورته:

به نسبت دو ضلع متناظر در دو شکل متشابه، نسبت تشابه گفته می شود.

یه نکته مهم:

اگه دو شکل متشابه باشن، هتما باید نسبت هر دو ضلع متناظرشون با هم برابر باشن.

مثلا توی شکل قبل، نسبت تشابه واسه هر سه تا ضلع برابر $\frac{1}{2}$ بود.

برای اینکه بهتر متوجه این نکته بشید، شکل زیر رو بینید، میفوام بینیم آیا دو شکل متشابه هستن یا نه؟



نسبت‌های تشابه رو برای اضلاع متناظر می‌نویسیم:

$\frac{4}{3}$ و $\frac{12}{6}$ ، اما این دو عدد برابر نیستن، بنابراین این دو شکل با هم متشابه نیستند.

نکاتی درباره شکل‌های متشابه:

۱. همه دایره‌ها با هم متشابه‌اند.
۲. همه مثلث‌های متساوی‌الاضلاع با هم متشابه‌اند.
۳. هر دو شکل همنهشت با هم متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها نیز ۱ است.

حل تمرین صفحه ۵۷

شکل‌های متشابه

۱- آیا هر دو شکل همنهشت با هم، متشابه نیز هستند؟

در صورت متشابه بودن نسبت تشابه چند است؟

دو تا شکل همنهشت یعنی دو تا شکلی که دقیقاً یکی هستن، پس متشابه هم هستن و نسبت تشابه اون‌ها برابر ۱ هست.

۲- آیا هر دو لوزی متشابه‌اند؟ چرا؟

خیر. در هر دو لوزی نسبت اضلاع متناظر با هم برابر ولی ممکنه اندازه زاویه‌ها یکسان نباشه، پس لزومه متشابه نیستن.

۶. مثلث ABC به ضلعهای ۴ و ۵ و ۸ با مثلث DEF به ضلع ۱-X، 10 و X+7 با هم متشابه‌اند. مقدار X را پیدا کنید.

چون دو شکل متشابه‌اند پس نسبت تشابه بین اضلاع متناظر آنها با هم برابره. بنابراین داریم:

$$\frac{X+7}{8} = \frac{10}{5} = 2$$

$$X+7 = 16 \rightarrow X = 9$$

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺

در صورت تمایل به عضویت، به ادمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam9

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" بپیوندید.